

数学 B

(80 分)

注意 解答を導くための過程も解答用紙に書きなさい。
解答用紙の裏面に解答を記入してはいけません。

数学 B

注意 解答を導くための過程も解答用紙に書きなさい。
解答用紙の裏面に解答を記入してはいけません。

1 (配点 35)

箱の中に金色の球が1個、銀色の球が3個、白色の球が8個、計12個の球が入っている。さらに金色の球は1個で景品と交換でき、銀色の球は2個で景品と交換できる。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) この箱から2個の球を同時に取り出すとき、景品がもらえる確率を求めなさい。
- (2) この箱から3個の球を同時に取り出すとき、景品がもらえる確率を求めなさい。
- (3) この箱から4個の球を同時に取り出すとき、景品がもらえる確率を求めなさい。

2 (配点 30)

次の[A], [B]のうちから、いずれか1つを選んで解答しなさい。

[A] 三角形ABCにおいて、 $\angle A$ は鋭角、 $\angle C = 30^\circ$ であるとし、辺ACの中点をDとする。さらに、3点B, C, Dを通る円を考えると、この円は直線ABと点Bで接しているとする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 三角形ABCと三角形ADBが相似であることを証明しなさい。
- (2) 辺ABの長さは線分DCの長さの何倍か求めなさい。
- (3) $\angle BDC$ の大きさを求めなさい。

[B] x, y を整数とする。次の問いに答えなさい。

- (1) 不等式 $x^2 + y^2 - xy \geq 0$ が成立することを証明しなさい。
- (2) $3x^2 - 3px + p^2 - 1 = 0$ を満たす整数 x と素数 p の組 (x, p) をすべて求めなさい。
- (3) $p = x^3 + y^3$ と表せる素数 p を小さいものから順に4つ求めなさい。

3 (配点 35)

$0 \leq x \leq \pi$ とする。 x の関数

$$f(x) = -\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + \sqrt{6}\sin x + \sqrt{2}\cos x + 2$$

について、次の問いに答えなさい。ただし、必要ならば $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ であることは証明なしに用いてよい。

- (1) $t = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ とおくとき、 t の取りうる値の範囲を求めなさい。
- (2) $f(x)$ を t の式で表しなさい。
- (3) (2)で得られた t の式を $g(t)$ とするとき、 $g(t)$ の最大値と最小値、およびそれらを与える t の値を求めなさい。
- (4) $f(x)$ の最大値を与える x を $x = \alpha$ と表すとする。このとき、 α が含まれる範囲として正しいものを次の(ア)~(エ)の中から選び、それを理由とともに答えなさい。

(ア) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{7}{12}\pi$ (イ) $\frac{7}{12}\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi$ (ウ) $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$ (エ) $\frac{3}{4}\pi < \alpha < \frac{5}{6}\pi$

受験番号	
------	--

数学B 解答用紙 (3枚中 その1)

得点

1

受験番号	
------	--

数学B 解答用紙 (3枚中 その2)

2 解答する問題の記号 (AまたはB) を記入しなさい。

受験番号	
------	--

数学B 解答用紙 (3枚中 その3)

数学 B (後期日程) 解答と出題意図

※各大問の出題意図と各問の解答を公表する。ただし、各問とも解答を導出するプロセスには、いくつものバリエーションがあるので、最終的に求める解のみを公表する。

なお、実際の採点では解答を導出するプロセスや記述の論理を重視している。

1 (出題意図)

確率に関する問題である。与えられた問題設定から事象を正しく考察し、確率の基本計算ができるかを問う。

(解答)

$$(1) \frac{7}{33} \quad (2) \frac{4}{11} \quad (3) \frac{257}{495}$$

2 [A] (出題意図)

平面図形に関する問題である。文章の意味を図形に正しく描く力と円の接線や三角形の相似に関する基本的な定理を使いこなす力を問う。

(解答)

(1) (略証)

接弦定理より $\angle ABD = \angle BCD$ であり、 $\angle BAC$ と $\angle DAB$ は共通角であるから等しい。

以上より 2 組の角がそれぞれ等しいので、三角形 ABC と三角形 ADB は相似である。

$$(2) \sqrt{2} \text{ 倍} \quad (3) 45^\circ \quad \left(\frac{\pi}{4} \text{ も可} \right)$$

2 [B] (出題意図)

等式・不等式および整数の性質に関する問題である。因数分解、素因数分解を関連づけて考察することを通じて、数学を統合的に活用する力が身についているかを問う。

(解答)

(1) (略証)

$$x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \text{ であるから不等式は成立.}$$

※証明方法はこのほかにも多数存在する。

$$(2) p = 2 \quad (3) p = 2, 7, 19, 37$$

3 (出題意図)

三角関数を含む関数の最大・最小に関する問題である。三角関数の合成などの基本的な計算力と、2次関数の最大・最小問題に帰着させる処理能力を問う。また、値の大小比較から角度を近似的にアプローチさせる応用力も問う。

(解答)

(1) $-1 \leq t \leq 2$ (2) $-t^2 + \sqrt{2}t + 4$

(3) 最大値 $\frac{9}{2} : t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小値 $3 - \sqrt{2} : t = -1$

(4) (ウ)

(理由の要点)

- ・ α ($0 < \alpha < \pi$) がただ一つであることを述べている。
- ・ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ と $\sin\frac{11}{12}\pi$ の大小比較の議論ができています。
- ・ $\sin x$ が $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ の範囲で単調減少することから、 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ と $\frac{11}{12}\pi$ の大小関係を正しく求められている。

※上記の要点以外でも、論理的に正しい理由が述べられている場合は同等に評価している。